Profesor
Edson Curahua

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

CLASE 02: CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN

CASOS

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

PROPIEDADES

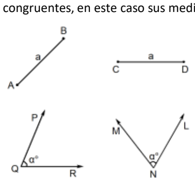
DEFINICIONES

FIGURAS CONGRUENTES

Concepto

Se denomina así a figuras que tienen la misma forma y el mismo tamaño.

En la figura siguiente se muestran dos segmentos congruentes y también dos ángulos congruentes, en este caso sus medidas serán iguales.



Ahora escribimos:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o $AB = CD$

También:

$\angle PQR \cong \angle MNL$ o $m\angle PQR = m\angle MNL$

$\cong$: se lee "es congruente con"

DEFINICIONES

En general dos figuras congruentes tienen todos sus elementos correspondientes de igual medida.

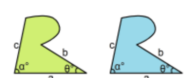


Figura 1 Figura 2

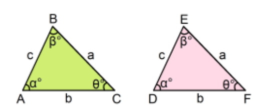
Figura 1 ≅ Figura 2

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes.

Para indicar que el "triángulo ABC es congruente al triángulo DEF", se escribe:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



DEFINICIONES

Esta sola expresión nos dice a la vez seis cosas, a saber:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ o $AB = DE$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ o $BC = EF$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$ o $AC = DF$

$\angle A \cong \angle D$ o $m\angle A = m\angle D$

$\angle B \cong \angle E$ o $m\angle B = m\angle E$

$\angle C \cong \angle F$ o $m\angle C = m\angle F$

En general dos figuras congruentes tienen todos sus elementos correspondientes de igual medida.

En cada una de las seis líneas anteriores, la congruencia de la izquierda significa lo mismo que la igualdad de la derecha. Podemos por tanto, utilizar una u otra notación según nos convenga.

Esta notación no solo expresa la congruencia de los triángulos sino además cuál es la congruencia. Es decir, el orden de los vértices establece una correspondencia entre ellos, de ahí que es posible establecer una correspondencia entre sus lados y también entre sus ángulos.

En dos triángulos congruentes, a lados congruentes se le oponen ángulos congruentes y recíprocamente, a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes.

CASOS DE CONGRUENCIA

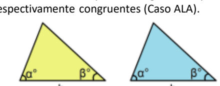
CASOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

En general dos figuras congruentes tienen todos sus elementos correspondientes de igual medida.

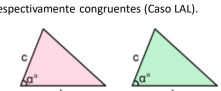
Para que dos triángulos sean congruentes, no necesariamente los seis pares de elementos correspondientes deben de ser congruentes, sino simplemente tres pares de ellos, entre los que por lo menos debe figurar un par de lados correspondientes, esto implica la congruencia de los restantes.

De acuerdo con la naturaleza de los elementos congruentes, resultan los siguientes casos de congruencia de triángulos:

Primer caso.- Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente congruentes (Caso ALA).

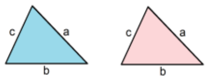


Segundo caso.- Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes (Caso LAL).

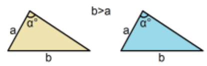


CASOS DE CONGRUENCIA

Tercer caso.- Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes (Caso LLL).



Cuarto caso.- Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de dichos lados respectivamente congruentes (Caso LLA).



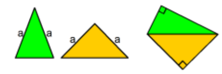
OBSERVACIONES

- Un problema se resuelve usando los criterios de congruencia de triángulos cuando en él se dan elementos (lados y ángulos) congruentes, es decir; si un problema tiene como datos lados congruentes y ángulos congruentes, es muy probable que se aplique la teoría de congruencia, busque los triángulos congruentes o haga algún trazo que genere triángulos congruentes.

- Es imposible encontrar triángulos congruentes sin tener lados congruentes, dos triángulos pueden tener los mismos ángulos y no ser congruentes.

CASOS DE CONGRUENCIA

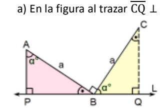
- Para que dos triángulos sean congruentes se necesita que tengan tres elementos respectivamente congruentes (L-A-L; A-L-A o L-L-L), dos elementos congruentes no son suficientes, para ilustrar esta idea se muestra a continuación varias parejas de triángulos que, aún cuando tienen elementos congruentes, no son congruentes, le sugerimos analizar cada caso y comprobar que, en efecto, no hay congruencia.



ANOTACIONES FINALES

01. Si dos segmentos consecutivos son congruentes y perpendiculares, entonces se recomienda formar triángulos rectángulos congruentes.

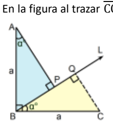
a) En la figura al trazar $\overline{CQ} \perp \overleftrightarrow{L}$, se obtiene:



$\Delta APB \cong \Delta BQC$
$(A - L - A)$

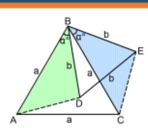
CASOS DE CONGRUENCIA

b) En la figura al trazar $\overline{CQ} \perp \overleftrightarrow{L}$, se obtiene:

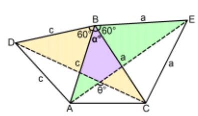


$\Delta APB \cong \Delta BQC$
$(A - L - A)$

02. Si dos triángulos equiláteros tienen un vértice común, resulta una configuración conocida que permite establecer la congruencia de dos triángulos. Por ejemplo en las dos figuras mostradas a continuación la congruencia se debe al caso (L-A-L).



$\Delta ABD \cong \Delta CBE$
$(L - A - L)$

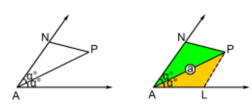


En la figura:
$\theta=120$

$\Delta ABE \cong \Delta DBC$
$(L - A - L)$

CASOS DE CONGRUENCIA

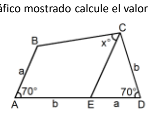
03. Se recomienda en situaciones donde se presente una bisectriz buscar congruencia a través de la "simetría" (espejo). En estos casos se tiene ángulos congruentes y por lo general el lado común sumado a otro elemento permite formar triángulos congruentes.



CASOS DE CONGRUENCIA

Ejemplo 01

Del gráfico mostrado calcule el valor de x.



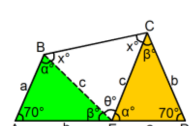
Resolución:

Le sugerimos que trace el segmento $\overline{BE}$, luego, advierta que los triángulos BAE y EDC son congruentes según el criterio que se acaba de describir pues:

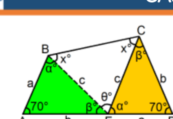
AB = ED = a
AE = DC = b
m∠A = m∠D = 70

Ahora que sabe que son congruentes, indique sus demás elementos iguales.

Si m∠ABE=α, ¿Cuánto mide el ángulo DEC? ¿Qué ocurre con los ángulos AEB y DCE, y con los lados BE y CE? Luego de esto, el gráfico quedará del siguiente modo:



CASOS DE CONGRUENCIA



Ahora se cumple que α + β = 110, entonces en el punto E, θ= 70.

Por último, en el triángulo isósceles BEC:

m∠EBC=m∠ECB=x

2x + θ = 180

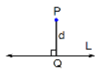
2x + 70 = 180

∴ x = 55

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

LA DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PUNTO

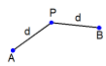
La distancia entre una recta y un punto fuera de ella es la longitud del segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta. La distancia entre una recta y un punto de la misma se define como cero.



Así en la figura P es un punto exterior a la recta L y $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{L}$, luego PQ=d es la distancia entre la recta L y el punto P.

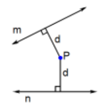
NOTAS

➭ La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une.
➭ Si un punto se encuentra a igual distancia de otros dos, entonces se dice que dicho punto equidista de los dos puntos.
➭ Si un punto se encuentra a igual distancia de dos rectas, entonces se dice que dicho punto equidista de las dos rectas.

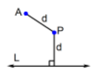


El punto P equidista de los puntos A y B.

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA



El punto P equidista de las rectas m y n.

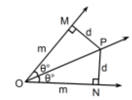


El punto P equidista del punto A y de la recta L.

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Teorema de la bisectriz de un ángulo

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.



$\boxed{PM = PN}$

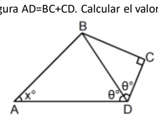
Además:

$\boxed{OM = ON}$

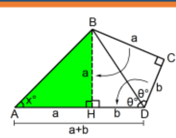
APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

Ejemplo 02

En la figura AD=BC+CD. Calcular el valor de x.



Resolución:



Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AD}$, luego por el teorema de la bisectriz:

BC=BH=a y CD=HD=b

Entonces: AH=a

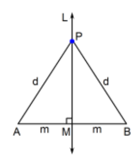
Por último, en el triángulo rectángulo AHB (isósceles), se tiene:

x=45

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

Teorema de la mediatriz de un segmento

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.



$\boxed{PA = PB}$

NOTA:

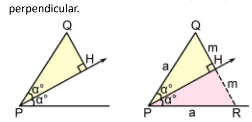
El triángulo APB es isósceles.

TEOREMA

En todo triángulo isósceles la altura relativa a la base, es también mediana, bisectriz interior relativa a la base y está contenida en la mediatriz relativa a la mencionada base

RECOMENDACIÓN

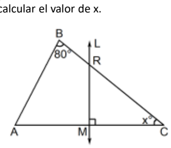
Observe el siguiente gráfico, tenemos la bisectriz del ángulo P y $\overline{QH}$ perpendicular a dicha bisectriz. En estos casos se recomienda prolongar la perpendicular.



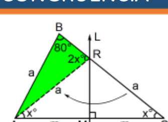
APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

Ejemplo 03

En la figura la recta L es la mediatriz de $\overline{AC}$. Si AB=RC, calcular el valor de x.



Resolución:



Por teorema de la mediatriz:

RA=RC=a y m∠C=m ∠ RAC=x

Luego: m∠ARB=2x (ángulo exterior del ∆ARC)

Por dato AB=a, es decir el triángulo BAR es isósceles, entonces:

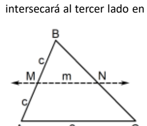
2x = 80

∴ x=40

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

Teorema de los puntos medios

Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo, se traza una paralela a cualquiera de los otros dos lados, entonces dicha paralela intersecará al tercer lado en su punto medio.



Si AM=MB y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

$\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$

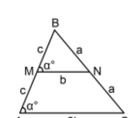
y $\boxed{BN = NC}$

NOTA:

A $\overline{MN}$ se le denomina base media

TEOREMA

En todo triángulo la base media es paralela al tercer lado y mide la mitad de lo que mide éste (base).



Si AM=MB y BN=NC

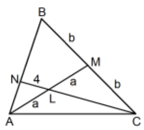
$\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$

y $\boxed{\overline{MN} \parallel \overline{AC}}$

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

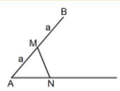
Ejemplo 04

Según el gráfico, calcular CL.

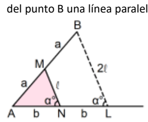


Resolución:

Los puntos medios nos llevan a pensar en la propiedad de la base media, en esta ocasión sugerimos tener presente lo siguiente:



Note que, a partir del punto medio M del segmento AB se tiene $\overline{MN}$, trate de ver este segmento ($\overline{MN}$) como una "base media", claro, falta la base, imagínela, vamos a ayudarle, trace del punto B una línea paralela a $\overline{MN}$.



Se tiene, entonces, que:

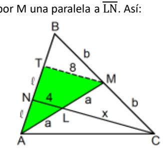
BL=2(MN)=2ℓ

m∠N=m∠L=α

AN=NL=b

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

En el problema, vea el ángulo MAB, en $\overline{MA}$ está ubicado el punto medio L y podríamos considerar $\overline{LN}$ como una "base media", claro está, se debe trazar por M una paralela a $\overline{LN}$. Así:



Se traza $\overline{MT} \parallel \overline{LN}$, entonces:

$\overline{LN}$: Base media del triángulo TAM

AN=NT=ℓ

MT=2(NL)=8

Como BM=MC y $\overline{MT} \parallel \overline{CM}$ se puede afirmar que $\overline{MT}$ es base media del triángulo NBC, entonces:

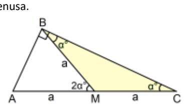
x + 4 = 2(8)

∴ x = 12

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

Teorema de la menor mediana en el triángulo rectángulo

En todo triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa mide igual que la mitad de dicha hipotenusa.



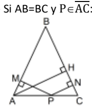
Si $\overline{BM}$ es mediana, entonces:

$$BM = \frac{AC}{2}$$

NOTA: Observe que los triángulos AMB y BMC son isósceles (AM=MB=MC)

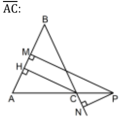
PROPIEDADES ADICIONALES

01.- Si AB=BC y P∈$\overline{AC}$:



AH=PM+PN

02.- Si AB=BC y P es un punto de la prolongación de $\overline{AC}$:

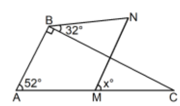


CH=PM-PN

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

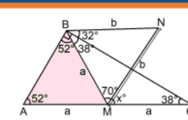
Ejemplo 05

En la figura AM=MC y BN=NM. Calcular el valor de x.



Resolución:

El punto medio M de la hipotenusa $\overline{AC}$ nos motiva a trazar la mediana $\overline{BM}$, contemos además con que van a formarse varios triángulos isósceles. Así:



Se traza $\overline{BM}$ (mediana relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$), entonces: BM=AM=MC=a

Luego en los triángulos isósceles ABM, MBC y BNM, se tiene:

m∠ABM=m∠BAM=52

m∠MBC=m∠MCB=38

m∠NBM=m∠NMB=70

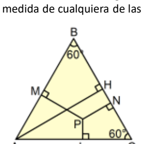
Por propiedad del ángulo exterior en el triángulo ABM:

70 + x = 52 + 52

∴ x=34

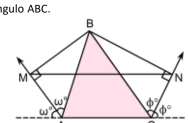
APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

03.- La suma de las distancias de un punto interior a los lados de un triángulo equilátero, es igual a la medida de cualquiera de las alturas.



AH=PM+PN+PL

04.- En el gráfico: p es el semiperímetro del triángulo ABC.

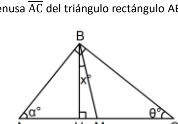


MN=p

$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

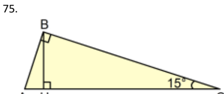
APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

05.- En el gráfico $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$ del triángulo rectángulo ABC.



$$x = \alpha - \theta$$

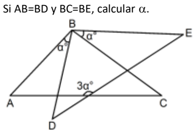
06.- Propiedad en el triángulo rectángulo de 15 y 75.



$$BH = \frac{AC}{4}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

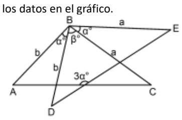
01. Si AB=BD y BC=BE, calcular α.



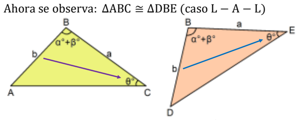
A) 20 B) 30 C) 15
D) 45 E) 37

Resolución:

Colocamos los datos en el gráfico.

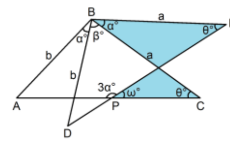


Ahora se observa: $\Delta ABC \cong \Delta DBE$ (caso $L - A - L$)



$\rightarrow m\angle ACB = m\angle DEB = \theta$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Sea P el punto de corte de $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$, llamemos ω a la medida del ángulo EPC, entonces:

Por corbata michi: $\omega + \theta = \alpha + \theta$

$\rightarrow \omega = \alpha$

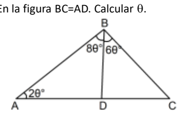
Finalmente, en el punto P:

$3\alpha + \omega = 180$
α

$\therefore \alpha = 45$ **Rpta. D**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

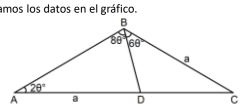
02. En la figura BC=AD. Calcular θ.



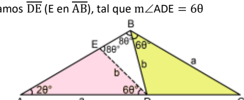
A) 10 B) 16 C) 18
D) 12 E) 20

Resolución:

Colocamos los datos en el gráfico.



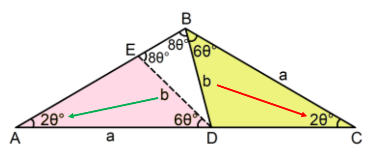
Trazamos $\overline{DE}$ (E en $\overline{AB}$), tal que $m\angle ADE = 6\theta$



Resulta: $m\angle DEB = 8\theta \rightarrow DE = DB = b$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Luego: $\Delta ADE \cong \Delta CBD$ (caso $L - A - L$)



$\rightarrow m\angle DAE = m\angle BCD = 2\theta$

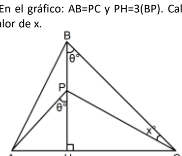
Finalmente, en el triángulo ABC:

$2\theta + 14\theta + 2\theta = 180$

$\therefore \theta = 10$ **Rpta. A**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

03. En el gráfico: AB=PC y PH=3(BP). Calcular el valor de x.



A) 15 B) 53/2 C) 37/2
D) 8 E) 16

Resolución:

Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.

$\therefore$ x =8 **Rpta. D**

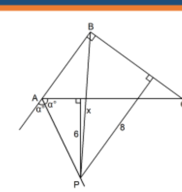
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

04. Dado un triángulo ABC, recto en B, en la bisectriz del ángulo exterior en A se ubica el punto P que dista 6 dm de $\overline{AC}$ y 8 dm de $\overline{BC}$. Calcular BP.

A) 10 B) 12 C) 15
D) 16 E) 9

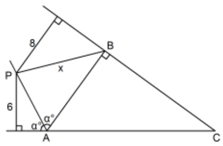
Resolución:

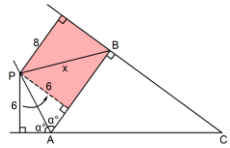
Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.



$\therefore$ x = 10 **Rpta. A**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

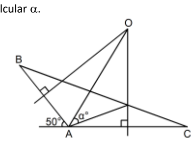




$\therefore x = 10$ **Rpta. A**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

05. Si O es circuncentro del triángulo ABC, calcular α.

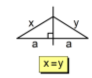


A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 45

Resolución:

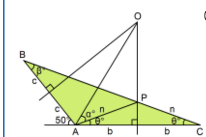
Recordemos que el circuncentro de un triángulo es el punto de concurrencia de las mediatrices referentes a sus lados.

Recordar



Por teorema de la mediatriz: $AP = PC = n$

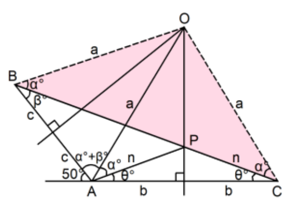
(ΔAPC: isósceles)



En el triángulo ABC, por ángulo exterior:

$\beta + \theta = 50$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Trazamos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, entonces, por teorema de la mediatriz:

$OA = OC \rightarrow m\angle OAC = m\angle OCA = \alpha + \theta$

$y\ m\angle OCP = \alpha$

$OB = OC \rightarrow m\angle OCB = m\angle OBC = \alpha$

$OB = OA \rightarrow m\angle OBA = \alpha + \beta = m\angle OAB$

Finalmente en el punto A:

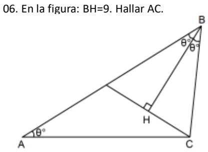
$50 + (\alpha + \beta) + \alpha + \theta = 180$

$2\alpha + \underbrace{\beta + \theta}_{50} = 130$

$\therefore \alpha = 40$ **Rpta. B**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

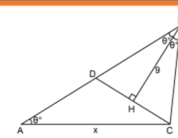
06. En la figura: BH=9. Hallar AC.

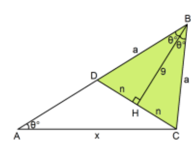


A) 9 B) 15 C) 18
D) 27 E) 36

Resolución:

Se pide AC=x.





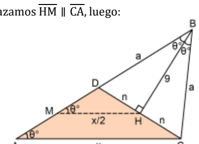
Se observa que el triángulo DBC es isósceles, luego:

DB=BC=a

y DH=HC=n

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

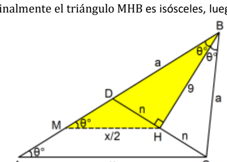
Trazamos $\overline{HM} \parallel \overline{CA}$, luego:



$m\angle DMH = \theta$, y

$MH = \frac{x}{2}$ ($\overline{HM}$ es base media)

Finalmente el triángulo MHB es isósceles, luego:



$MH = HB$

$\frac{x}{2} = 9$

$\therefore x = 18$ **Rpta. C**

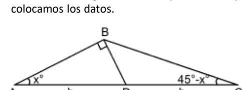
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

07. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BD}$, tal que: m∠BCD=45-m∠BAD y m∠ABD=90. Calcule m∠BAD.

A) 53/2 B) 37/2 C) 28
D) 30 E) 32

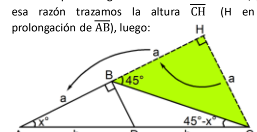
Resolución:

Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.



Se pide m ∠BAD=x

Observe que el ángulo exterior en B mide 45, por esa razón trazamos la altura $\overline{CH}$ (H en la prolongación de $\overline{AB}$), luego:



$\Delta BHC: BH = HC = a$

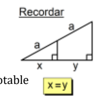
Ahora en el triángulo AHC:

$BH = a = AB$

Finalmente el triángulo AHC es notable

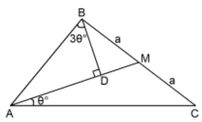
$\therefore x = 53/2$ **Rpta. A**

Recordar



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

08. Si BM=MC y AB=2(DM), calcular θ.

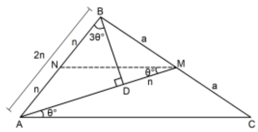


A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

Resolución:

Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.

Sea AB=2n, luego por dato: DM=n

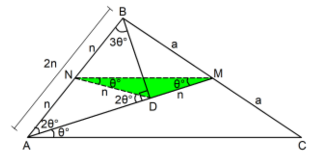


Sea N el punto medio de $\overline{AB}$, luego en el triángulo ABC: $\overline{MN}$ es base media, por tanto:

m∠NMA=m∠MAC=θ

($\overline{MN} \parallel \overline{AC}$)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Ahora $\overline{DN}$ es mediana relativa a la hipotenusa en el triángulo rectángulo ADB, entonces:

AN=NB=ND=n

De esta forma, se tiene:
En ΔNDM (isósceles):
m∠DNM=θ
En ΔAND (isósceles):
m∠NDA=2θ=m∠NAD

Por último, en el triángulo rectángulo ADB:

$$2\theta + 3\theta = 90$$

$\therefore \theta = 18$ **Rpta. D**

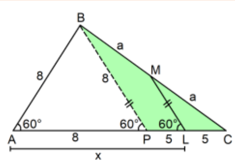
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

09. En un triángulo ABC se ubican en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ los puntos M y L, tal que BM=MC, AB=8, LC=5 y m∠BAC=m∠MLA=60. Calcular AL.

A) 16 B) 12 C) 15
D) 13 E) 14

Resolución:

Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.



$\therefore x = 13$ **Rpta. D**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

10. Se tiene un triángulo ABC tal que la mediana $\overline{BM}$ es intersecada en su punto medio por la ceviana $\overline{AD}$. Si BC=12, calcular BD.

A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

Resolución:

$\therefore x = 4$ **Rpta. E**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11. Se tiene un triángulo ABC en el cual se traza la ceviana interior $\overline{BE}$ tal que: BE=EC y m∠EBC=2(m∠ABE). Calcular la m∠BAE.

A) 15 B) 22,5 C) 37
D) 30 E) 18

Resolución:

$\therefore x = 30$ **Rpta. D**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12. En un triángulo acutángulo ABC, se cumple que: m∠ABC=3(m∠ACB). Si la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a la prolongación de la bisectriz interior $\overline{BM}$ en el punto P, entonces el mayor valor entero de la medida (en grados sexagesimales) del ángulo PCA es:

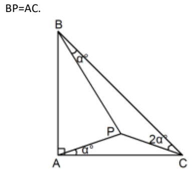
A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

Resolución:

$\therefore x = 14$ **Rpta. D**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

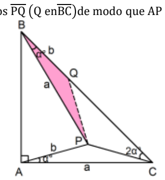
13. Del gráfico, calcular el valor de α, si BP=AC.



A) 10 B) 12 C) 15
D) 22,5 E) 18

Resolución:

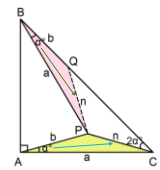
Trazamos $\overline{PQ}$ (Q en $\overline{BC}$) de modo que $AP = BQ = b$

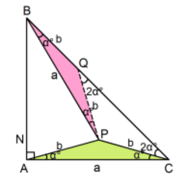


Luego: $\Delta PAC \cong \Delta PBQ$ (caso $L-A-L$)

$\rightarrow PQ = PC = n$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



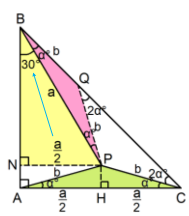


Luego tendremos: $m\angle PQC = 2\alpha$

$\rightarrow m\angle QPC = \alpha = m\angle PCA$

$y\ \ n = b$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



En ΔBNP (not): $m\angle PBN = 30$

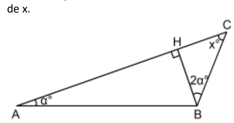
En ΔBAC:

$30 + 4\alpha = 90$

$\therefore \alpha = 15$ **Rpta. C**

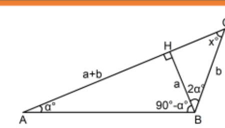
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

14. En la figura: AH=BC+BH. Calcular el valor de x.

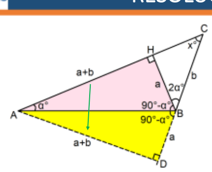


A) 30 B) 37 C) 15
D) 18 E) 45

Resolución:



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



$\therefore x = 45$ **Rpta. D**

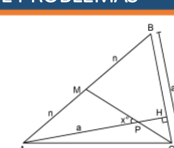
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

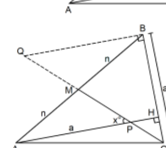
15. En un triángulo ABC, la mediana $\overline{CM}$ interseca en P a la altura $\overline{AH}$. Calcular la $m\angle APM$, si AP=BC.

A) 30 B) 60 C) 37
D) 53 E) 45

Resolución:

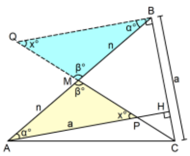
Hacemos el gráfico correspondiente y colocamos los datos.





Trazamos $\overline{BQ} \parallel \overline{PA}$, y ubiquemos los ángulos congruentes.

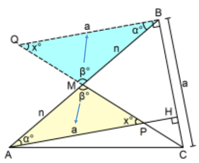
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



$\Delta AMP \cong \Delta BMQ$

$(A - L - A)$

$\rightarrow AP = BQ = a$



ΔQBC: rectángulo isósceles

$\therefore x = 45$ **Rpta. E**

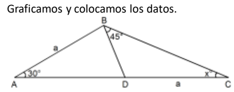
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16. En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que AB=DC y m∠DBC=45. Si m∠A=30, calcular m∠C.

A) 18,5 B) 15 C) 22,5
D) 26,5 E) 30

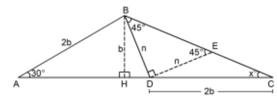
Resolución:

Graficamos y colocamos los datos.



Se pide: m∠C=x.

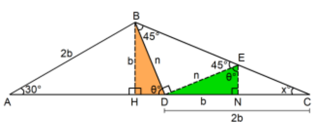
El primer paso será tratar de utilizar los ángulos notables de 30 y 45, para ello trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ y $\overline{DE} \perp \overline{BD}$ (E en $\overline{BC}$), luego:



Si a=2b, entonces DC=2b y BH=b

También: BD=DE=n y m∠DEB=45

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

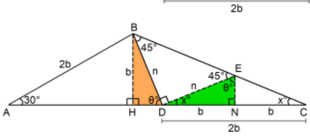


Trazamos $\overline{EN} \perp \overline{DC}$ y ahora se observa:

$\Delta BHD \cong \Delta DNE$

$\rightarrow BH = DN = b$

$y\ NC = b$



El triángulo DEC es isósceles (DN=NC=b), de donde resulta:

$m\angle C = m\angle EDC = x$

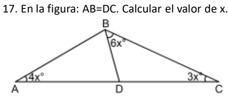
Finalmente, por ángulo exterior en el triángulo DEC, tendremos:

$x + x = 45$

$\therefore x = 22{,}5$ **Rpta. C**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

17. En la figura: AB=DC. Calcular el valor de x.



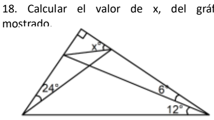
A) 7 B) 8 C) 15/2
D) 14 E) 10

Resolución:

$\therefore x = 15/2$ **Rpta. C**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

18. Calcular el valor de x, del gráfico mostrado.



A) 18 B) 20 C) 24
D) 36 E) 48

Resolución:

$\therefore x = 36$ **Rpta. D**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz del ángulo ABH que interseca a $\overline{AH}$ en P, luego se traza la bisectriz del ángulo APB que interseca a la prolongación de $\overline{CB}$ en Q y además se traza la bisectriz del ángulo PQB que interseca a $\overline{PB}$ en R. Calcule BR, siPQ=a y BQ=b.

A) $\frac{a-b}{2}$ B) $a-b$ C) $a+b$
D) $\frac{a+b}{2}$ E) $\sqrt{ab}$

Resolución:

$\therefore x = a - b$ **Rpta. B**

PITAGORAS ACADEMIA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

20. En un triángulo ABC: $m\angle A=30$ y $m\angle C=20$; D es un punto exterior y relativo a $\overline{AC}$ tal que pertenece a la mediatriz de dicho lado. Si $m\angle ACD=10$, calcular $m\angle DBC$.

A) 30 B) 36 C) 40
D) 45 E) 50

Resolución:

$\therefore x = 50$ **Rpta. E**